Prof. Dr. Hans-Jörg Meier
Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt
Fakultät für angewandte Natur- und Geisteswissenschaften

Übungsaufgaben

zur Vorlesung

Ingenieurmathematik 1

im Bachelor–Studiengang Mechatronik

Gauss–Algorithmus, Determinante, Invertierbarkeit

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme durch elementare Umformungen in den Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix (Gaußscher Algorithmus):

a) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 3v & + & 2w & = & 19 \\ 2u & - & 18v & + & w & = & -85 \\ -6u & + & 2v & + & 3w & = & 1 \\ 3u & + & v & + & 5w & = & 16 \end{array}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}$$

2. **Klausuraufgabe SS 09:** Gegeben sind die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter a und der Vektor $\vec{b} = (2; 3; 2; 1)^t$.

a) Bestimmen Sie $det(\mathbf{A})$.

b) Für welche a hat das homogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ mehr als eine Lösung?

c) Setzen Sie nun $a = 2$ und lösen Sie $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

3. Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung?

4. **Klausuraufgabe WS 14/15:** Gegeben sind der Vektor $\vec{b} = (1;1;1;1)^t$ und die Matrix

$$\mathbf{A}(\phi) = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter ϕ.

   a) Bestimmen Sie $det(\mathbf{A}(\phi))$.

   b) Für welche ϕ ist $\mathbf{A}(\phi)$ invertierbar ?

   c) Setzen Sie $\phi = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie $(\mathbf{A}(\frac{\pi}{4}))^2$.

   d) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

   unter Verwendung des Gauss-Algorithmus.